



[1] 2013 1[1]

АГГ+ часопис за архитектуру, грађевинарство, геодезију и сродне научне области  
ACEG+ Journal for Architecture, Civil Engineering, Geodesy and other related scientific fields

258-267

Оригиналан научни рад | Research paper

UDK I UDC 624.073.8.046

DOI 10.7251/AGGPLUS1301258C

Рад примљен | Paper received 19/11/2013

Рад прихваћен | Paper accepted 12/12/2013

### Радомир Цвијић

Архитектонско-грађевински факултет Универзитета у Бањалуци, Војводе Степе Степановића 77/3, Бањалука

### Александар Борковић

Архитектонско-грађевински факултет Универзитета у Бањалуци, Војводе Степе Степановића 77/3, Бањалука

### Саша Татар

Архитектонско-грађевински факултет Универзитета у Бањалуци, Војводе Степе Степановића 77/3, Бањалука

О УТИЦАЈУ  
ИНТЕРАКЦИЈЕ МОДОВА  
НА СВОЈСТВЕНЕ ОБЛИКЕ  
ИЗВИЈАЊА  
ТАНКОВИДНИХ НОСАЧА

ON THE INFLUENCE OF  
MODE INTERACTION ON  
THE BUCKLING  
EIGENSHAPES OF THIN-  
WALLED STRUCTURES

Оригиналан научни рад

Research paper

Рад примљен | Paper accepted

12/12/2013

UDK | UDC

624.073.8.046

DOI

10.7251/AGGPLUS1301258C

### Радомир Цвијић

Архитектонско-грађевински факултет Универзитета у Бањалуци, Војводе Степе Степановића 77/3, Бањалука

### Александар Борковић

Архитектонско-грађевински факултет Универзитета у Бањалуци, Војводе Степе Степановића 77/3, Бањалука

### Саша Татар

Архитектонско-грађевински факултет Универзитета у Бањалуци, Војводе Степе Степановића 77/3, Бањалука

## О УТИЦАЈУ ИНТЕРАКЦИЈЕ МОДОВА НА СВОЈСТВЕНЕ ОБЛИКЕ ИЗВИЈАЊА ТАНКОЗИДНИХ НОСАЧА

### АПСТРАКТ

У раду се дају нека разматрања о утицају интеракције модова на облике извијања танкозидних носача. Класична теорија је ограничена искључиво на носаче недеформабилног попречног пресека, те је за општију анализу било потребно примијенити полуаналитички метод коначних трака. Поље помјерања траке је апроксимирано редом производа тригонометријских функција и полинома, при чему су за тригонометријске функције усвојени својствени облици Бернули-Ојлерове греде. Кориштене су и спојена и раздвојена формулација метода коначних трака.

На основу изложене теорије, развијен је програмски код који омогућава детаљан увид у проблеме интеракције модова. Детаљно су анализирани криве извијања и стабилности једног отвореног и једног затвореног попречног пресека. Указано је на утицај критичне дужине локалног извијања слободно ослоњеног носача на доминантне својствене облике носача других услова ослањања и произвољне дужине.

**Кључне ријечи:** танкозидни носачи, интеракција модова, криве стабилности, метод коначних трака.

## ON THE INFLUENCE OF MODE INTERACTION ON THE BUCKLING EIGENSHAPES OF THIN-WALLED STRUCTURES

### ABSTRACT

Some considerations on influence of mode interaction on eigenshapes of the thin-walled structures are given. Classic theory is limited on structures with non-deformable cross section, so that for general analysis it was necessary to apply semi-analytical finite strip method. Strip displacement field is approximated with sum of products of trigonometric functions and polynomials, where the trigonometric functions are chosen as eigenmodes of Bernoulli-Euler beam. Both coupled and uncoupled finite strip formulations are used.

Following the presented theory, computer program which enables detailed insight into mode interaction problems is developed. Buckling and stability curves of one open-section and one closed-section are analysed in details. Influence of local buckling critical length of simply supported structure on dominant eigenmodes of structures with different boundary conditions and arbitrary length is indicated.

**Keywords:** thin-walled structures, mode interaction, stability curves, finite strip method.

## 1. УВОД

Танкозидни носачи се често користе у инжењерским конструкцијама. Њихова основна карактеристика јесте да имају малу сопствену тежину а прилично велику крутост. С друге стране, веома су осјетљиви на губитак стабилности. Наиме, усљед великих напона притиска, често се дешава губитак првобитне форме равнотеже, те долази до нове равнотежне форме која зависи од дужине носача, облика попречног пресека, дебљине зидова, граничних услова и типа оптерећења. Према важећим прописима, неопходна је провјера ових носача на губитак локалне и глобалне стабилности. Прописани алгоритми прорачуна су засновани на приближним обрасцима који могу више или мање одступати од тачних вриједности критичних оптерећења.

Класична теорија танкозидних носача може описати само понашање носача код којих су доминантни глобални модови, тј. код којих је попречни пресјек крут у својој равни [1]. С обзиром на сложеност проблема, рјешење у затвореном облику постоји тек за неколико једноставних случајева. Увид у понашање носача деформабилног попречног пресека додатно компликује теорију. За рјешавање ових случајева морају се примијенити нумеричке методе. Тренутно најпопуларнији поступак за нумерички прорачун конструкција јесте метод коначних елемената (МКЕ). Општост МКЕ је његова велика предност. Истовремено, показује се да је за неке класе конструкција згодно развити специјалне нумеричке процедуре које могу бити ефикасније од МКЕ. Тако је метод коначних трака (МКТ) примјенљив код призматичних конструкција чија је дужина доминантна у односу на димензије попречног пресека [2]. Компонента поља помјерања по дужини конструкције се узима као тригонометријски ред који задовољава граничне услове *a priori*, док се дискретизација врши само у попречном пресеку. Слиједи да МКТ спада у полуаналитичке методе.

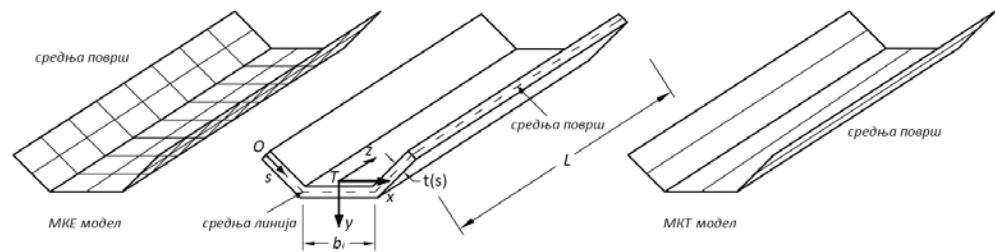
Познато је да код слободно ослоњених танкозидних носача не долази до интеракције модова. Ово међутим не важи за остале услове ослањања. Од изузетног значаја је класификација модова по облику губитка стабилности. У раду [3] је приказана декомпозиција модалног простора на глобалне, локалне, дисторзионе и остале облике.

У првом дијелу се укратко даје преглед теорије танкозидних носача са акцентом на интеракцију модова. Потом је сажето описан метод коначних трака, и то његова спојена и раздвојена формулација. На крају је дат нумерички примјер у коме је сликовито појашњена интеракција модова.

## 2. ПОСТАВКА ПРОБЛЕМА

### 2.1. ТАНКОЗИДНИ НОСАЧИ

Под појмом танкозидних носача подразумијевамо тијела облика цилиндричних или призматичних љуски које по В. З. Власову (Васи́лий Заха́рович Вла́сов) [1] задовољавају услове:  $t/b < 0.1$  и  $b/L < 0.1$ , гдје је:  $t$  дебљина зида,  $b$  карактеристична димензија попречног пресека (ширина, висина, дужина средње линије) а  $L$  дужина носача, слика 1.



Слика 1. Танкозидни носач и његов МКЕ и МКТ модел

Зависно од облика попречног пресека, теорија танкозидних носача се дијели на теорију танкозидних носача отвореног и теорију танкозидних носача затвореног попречног пресека. Основе теорије танкозидних носача отвореног попречног пресека је дао В. З. Власов [1]. Поред уобичајених претпоставки линеарне теорије еластичности, у класичној теорији танкозидних носача уводе се и сљедеће претпоставке:

- 1) пресјек је апсолутно крут у својој равни.
- 2) занемарује се клизање у средњој површи плоча које чине носач
- 3) прав линијски елемент, управан на средњу површ прије деформације, и након деформације остаје прав, непромијењене дужине и управан на деформисану средњу површ (*Kirchhoff-Love* хипотеза).

С уведеним претпоставкама, понашање танкозидног носача се описује само на основу помјерања његове осе [1]. Међутим, овако постављена класична теорија не може са задовољавајућом тачношћу описати помјерања танкозидних носача код којих је попречни пресјек деформабилан. За овакве носаче је неопходно примијенити комплексније теорије или нумеричке методе. Примјер дискретизације носача примјеном МКЕ и МКТ дат је на слици 1.

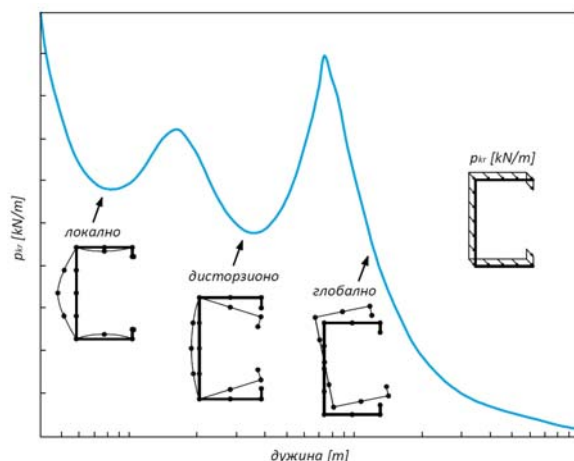
## 2.2. ИНТЕРАКЦИЈА МОДОВА

Када се говори о недеформабилној контури пресека, тада попречни пресјек може да се креће транслаторно у правцу осе штапа, да врши ротацију око три главне осе инерције и да се витопери. С обзиром на то да су неке од диференцијалних једначина равнотеже спрегнуте [1], и ова помјерања ће бити у међусобној зависности. Само у специјалним случајевима јавиће се у својим чистим облицима. Ова међусобна зависност начина помјерања тачака пресека назива се и међудејство или интеракција. Да ли ће доћи до спрезања ових помјерања зависи од начина ослањања штапа, геометријских карактеристика пресека и од начина терећења.

Приликом губитка стабилности форме равнотеже, деформисан облик носача се назива својствени облик или својствени вектор. Интензитет оптерећења при коме долази до губитка форме равнотеже назива се својствена вриједност или критично оптерећење носача. Сваки својствени облик и њему одговарајуће критично оптерећење чине један мод конструкције.

Својствени облици могу бити локални, дисторзиони, глобални и остали [3]. Локални су они код којих чворне линије између лимова остају праве а угао између лимова непромијењен. Дисторзиони су они код којих долази до промјене облика попречног пресека, изузимајући локалне облике. Глобални су они код којих се носач симултано

савија или увија без промјене облика попречног пресека. Уколико облик не задовољава ниједан од побројаних критеријума, сврставамо га у категорију *осталих*. Типична крива извијања на којој се јасно уочавају подручја гдје су доминантне поједине класе облика приказана је на слици 2.



Слика 2. Типична крива извијања са различитим видовима извијања за равномјерни притисак

Код обје групе носача (отвореног/затвореног попречног пресека) до величине критичних сила, при локалном губитку стабилности, долази се разматрањем појединих зидова носача као изолованих плоча, водећи при томе рачуна о њиховој повезаности (условима ослањања). Овакав приступ даје граничне вриједности критичне силе за различите услове ослањања, док се стварна вриједност силе налази између тих граничних вриједности.

### 3. МЕТОД КОНАЧНИХ ТРАКА

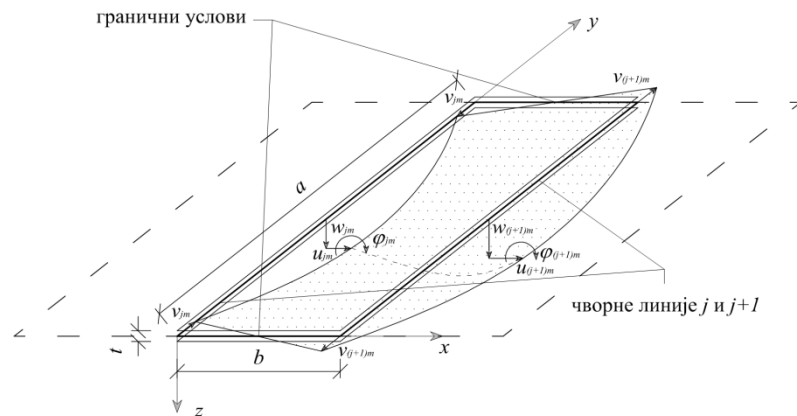
С обзиром на то да не постоји затворено рјешење постављеног проблема, његово приближно рјешење се тражи примјеном нумеричких метода. Овдје је примијењен добро познати МКТ, погодан за анализу бифуркационе стабилности танкозидних носача [3].

#### 3.1. ИНТЕРПОЛАЦИОНЕ ФУНКЦИЈЕ

Конечна трака нижег реда (*low order strip* – LO2 трака) је приказана на слици 3. Ова трака је погодна за анализу призматичних љуски [2], у које спадају и танкозидни носачи. Њоме се моделира савијање танких плоча према *Kirchoff-Love* теорији, заједно са мембранским напрезањем. Континуум се дискретизује у двије чворне линије са по четири степена слободe. Из *Kirchoff-Love* теорије сlijеди да се компоненте помјерања свих тачака могу представити у функцији помјерања тачака средње равни плоче. Тако се поље помјерања средње равни апроксимира редом производа тригонометријских функција и полинома:

$$u_0(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x) Y_m(y) \quad v_0(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} v_m(x) Y_m^v(y) \quad w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} w_m(x) Y_m(y) \quad (1)$$

Овдје су  $Y_m$  базне функције које се стандардно узимају као својствени облици Бернули-Ојлерове греде [2]. У овом раду ћемо разматрати три типа ослањања: обострано слободно ослоњена (ОО), обострано укљештена (UU) и с једне стране укљештена а с друге слободно ослоњена (UO) трака.



Слика 3. Слободно ослоњена LO2 трака за  $m=1$

Функција  $Y_m^v$  је једнака нормираној вриједности  $dY_m/dy$ , док се попречне функције  $u_m(x)$ ,  $v_m(x)$  и  $w_m(x)$  добијају као производ класичних Хермитевих полинома и параметара помјерања [2]. Након усвојене апроксимације поља помјерања, примјеном стандардног поступка се изводи основна матрица крутости траке, нпр. примјеном принципа о стационарној вриједности тоталне потенцијалне енергије.

### 3.2. БИФУРКАЦИОНА СТАБИЛНОСТ

Сматра се да систем губи стабилност када за мале поремећаје даје велик одговор. Тачно одређивање губитка еластичне стабилности подразумијева провођење геометријски нелинеарног статичког прорачуна. Сматра се да систем губи стабилност у граничним тачкама, по помјерањима или оптерећењу. Међутим, ова процедура је прилично компликована, те се ријетко употребљава у инжењерским прорачунима. С друге стране, линеаризована теорија је много чешће у употреби. Линеаризацијом нелинеарних компоненти деформације, те примјеном принципа о минимуму тоталне потенцијалне енергије, дефинише се и геометријска матрица крутости (матрица почетних напона). У ствари, геометријска матрица крутости је посљедица енергије деформације усљед рада нормалних напона на нелинеарним компонентама деформације.

Тако се проблем бифуркационе стабилности своди на рјешавање једначине

$$(K + \lambda K_G)q = 0 \quad (2)$$

гдје је  $K$  основна матрица крутости система,  $K_G$  је геометријска матрица крутости,  $\lambda$  параметар оптерећења а  $q$  вектор помјерања. С обзиром на то да нас интересују само нетривијална рјешења, проблем се своди на систем хомогених једначина

$$q \neq 0 \Rightarrow \det(K + \lambda K_G) = 0 \quad (3)$$

чија су рјешења својствене вриједности  $\lambda_n$  и својствени вектори  $q_n$ . Параметри  $\lambda_n$  представљају критичне вриједности оптерећења а вектори  $q_n$  облике губитка стабилности система са  $n$  степени слободе помјерања. Упрошћено речено, сматрамо да конструкција губи стабилност када спољашње оптерећење достигне толики ниво да геометријска крутост поништи основну крутост система.

Геометријска крутост се у линеаризованој теорији уводи тако што претпостављамо да знамо квалитативну расподелу напона усљед дејства оптерећења. У овом раду се, уобичајено, разматра равномјерна расподела нормалних напона у подужном правцу. Оно што је непознато, то је интензитет тих напона и ту величину управо даје критично оптерећење као рјешење једначине (3).

### 3.3. СПОЈЕНА И РАЗДВОЈЕНА ФОРМУЛАЦИЈА

Приликом одређивања елемената основне и геометријске матрице крутости јавља се сљедећих пет карактеристичних интеграла:

$$I_1 = \int_0^a Y_m Y_n dy, \quad I_2 = \int_0^a Y_{,ymm} Y_n dy, \quad I_3 = \int_0^a Y_m Y_{,yyn} dy, \quad I_4 = \int_0^a Y_{,yym} Y_{,yyn} dy, \quad I_5 = \int_0^a Y_{,ym} Y_{,yn} dy. \quad (4)$$

С обзиром на то да смо за функције  $Y(y)$  изабрали функције својствених облика вибрација, ове функције задовољавају услов ортогоналности:

$$I_1 = \int_0^a Y_m Y_n dy = 0, \quad \text{за } m \neq n, \quad (5)$$

а може се показати [4] да важи и услов

$$I_4 = \int_0^a Y_{,yym} Y_{,yyn} dy = 0, \quad \text{за } m \neq n. \quad (6)$$

Међутим, преостала три интеграла су једнака нули за  $m \neq n$  само у случају  $OO$  траке. Често се сматра да су ови интеграла за  $UO$  и  $UU$  траку довољно мали да се могу занемарити. Међутим, у примјеру ћемо показати да ипак долази до интеракције модова у случају ова два типа ослањања.

Тако се код  $OO$  траке може занемарити међудјеловање чланова реда јер су сви елементи матрице крутости ван главне дијагонале једнаки нули. Тиме се цијела процедура поједностављује и анализу можемо вршити засебно за сваки члан реда. У случају статичке анализе, резултати се на крају сабирају. Овим се постиже значајна уштеда у времену потребном за прорачун.

### 3.4. КРИВЕ СТАБИЛНОСТИ И ИЗВИЈАЊА

*Крива извијања* за неко  $m$  (члан реда) и  $OO$  граничне услове у ствари представља геометријско мјесто тачака уређених парова критичних сила и дужина носача, при чему је  $m$  број полуталаса у подужном правцу. На овим кривама је могуће уочити области дужина у којима је доминантан неки од видова губитака стабилности. На почетку криве налази се област дужина у којима је доминантно локално извијање, на крају област дужина где је доминантно глобално извијање, а између њих се налази област дисторзионог извијања. Област дужина категорије осталих се протеже на готово све

дужине. Код неких носача не постоји изражена област дужина дисторзионог извијања, што је последица односа крутости плоча од којих је носач састављен и то на нивоу пресека (локална крутост) и на нивоу носача као цјелине (глобална крутост). Не треба изгубити из вида да се појединачни дијелови пресека извијају (имају полуталасе) у два правца: попречно и подужно.

Критична сила за  $m=1$  и  $OO$  даје најмање одговарајуће дужине носача. Уочавајући минимуме критичних сила по областима (локалних, дисторзионих, глобалних и осталих) извијања, можемо дефинисати *критичну дужину за област*. Поред тога, за области локалног и дисторзионог извијања, постоје локални минимум или превојна тачка и величина дужине извијања у тој тачки је критична дужина извијања за ту област, док за област глобалног извијања критична дужина тежи у бесконачност. Прецизност одређивања границе између ових области и прецизност одређивања локалних минимума зависи од величине интервала дужина на којима су рачуната критична оптерећења у околини ових тачака.

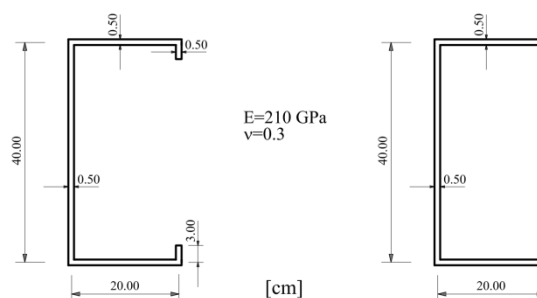
Обвојница кривих извијања назива се *крива стабилности* и она дијели раван ( $p_{kr}, L$ ) на област стабилности испод криве стабилности и област нестабилности изнад (област посткритичне стабилности). И на кривој стабилности разликујемо области гдје су доминантни поједини видови губитака стабилности. Да ли ће се појавити све ове области, зависи од односа критичних оптерећења за њих. Наиме, уколико је критично оптерећење за локалну стабилност мање од критичног оптерећења за дисторзиону, на кривој стабилности се може уочити да ће губитак стабилности бити или локални или глобални, те област дисторзионог извијања онда не постоји.

Да би се прецизно одредиле границе ових области, неопходно је за апроксимацију поља помјерања усвојити нешто већи број чланова реда од доминантног члана реда.

#### 4. НУМЕРИЧКИ ПРИМЈЕР И ДИСКУСИЈА

Представљена процедура је програмирана у програмском пакету *Wolfram Mathematica*. Резултат је програмски код назван СТАНКО (Стабилност ТАНкозидних КОНструкција) [5]. Разматрају су један отворени и један затворени попречни пресјек, слика 4.

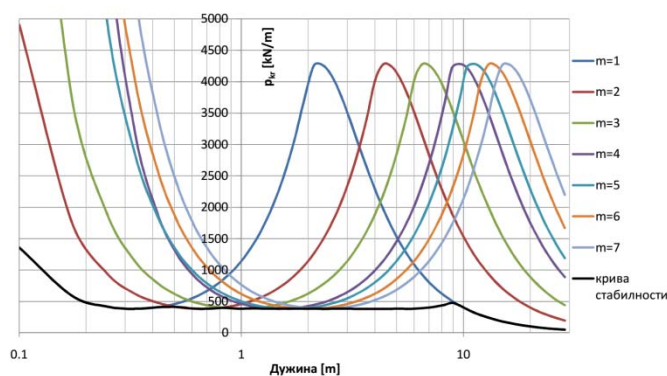
Прво су одређене криве извијања за 7 полуталаса према раздвојеној формулацији, слике 5 и 6. Уочава се да код кутијастог профила нема области дисторзионог извијања, што је последица крутости затвореног пресека. С друге стране, код кривих извијања за С профил, дисторзиона област је јасно изражена али се губи на кривој стабилности.



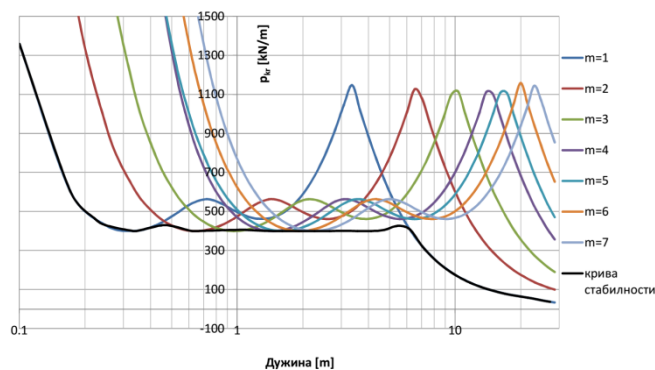
Слика 4. Разматрани пресеци



Приликом прорачуна носача по спојеној формулацији извршено је одређивање учешћа чланова реда у појединим својственим облицима.



Слика 5. Криве извијања и крива стабилности за ОО кутијаст носач

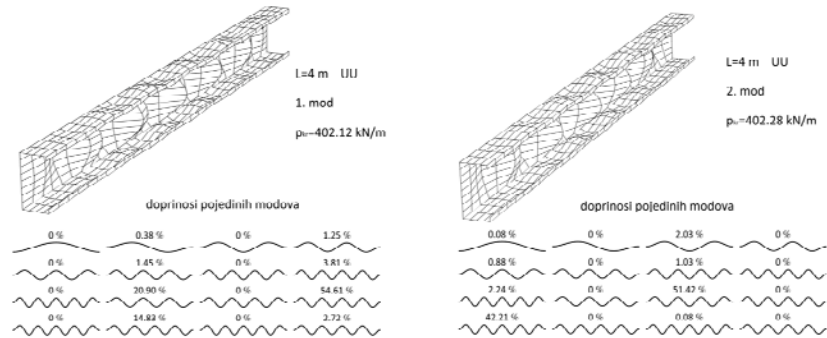


Слика 6. Криве извијања и крива стабилности за ОО носач С профила

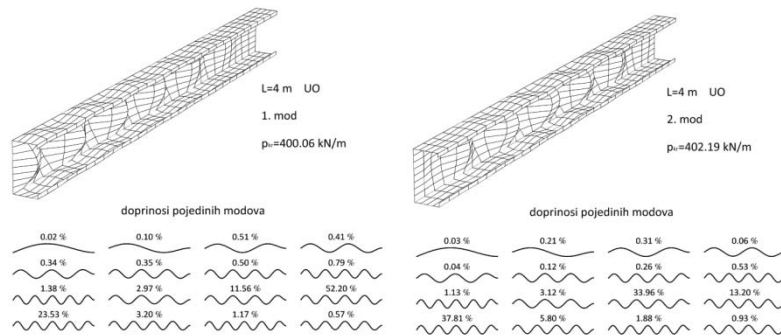
Са кривих извијања за један члан реда и ОО услове ослањања очитана је критична дужина извијања за локалне својствене облике. Са слика 5 и 6 се може видјети да је то за оба анализирана носача отприлике 0,33 m. Ова вриједност је посљедица идентичног вертикалног лима код оба усвојена пресека, чије је избочавање доминантно у локалној области. Помоћу ове вриједности можемо одредити доминантан члан реда (тј. број полуталаса) за произвољну дужину носача.

Тако су на сликама 7, 8, 9 и 10 дата прва два својствена облика за разматране профиле UU и UO граничних услова на дужини од 4 m. Такође су дати и одговарајући проценти доприноса појединих чланова реда. Може се уочити да је доминантан број полуталаса за обје форме извијања приближно  $4/0.33=12$ .

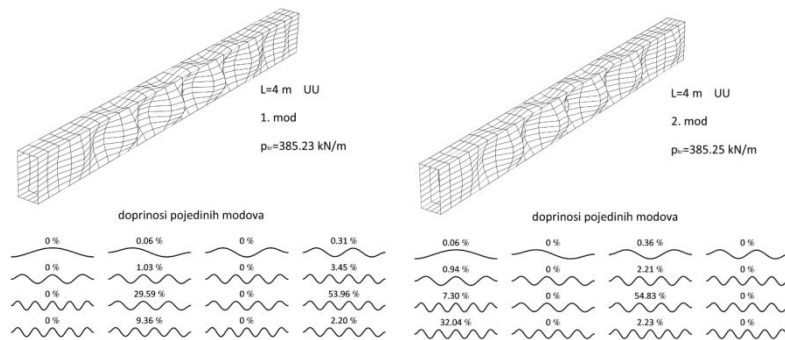
Може се примјетити да су најниже двије критичне силе за оба разматрана услова ослањања скоро идентичне. Код UU се добијају као доминантни или парни или непарни чланови реда, док се код UO не може направити оваква разлика.



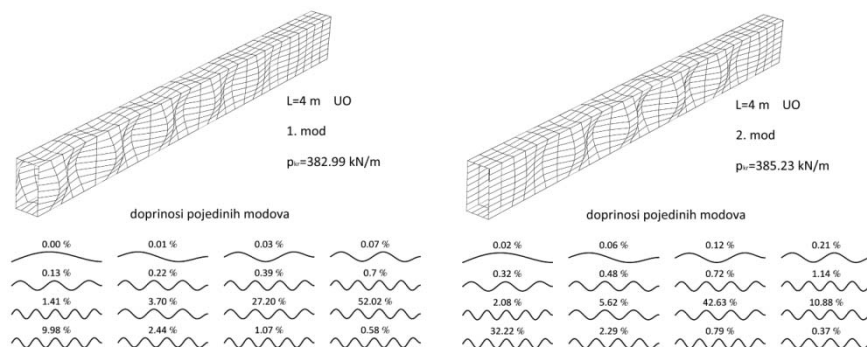
Слика 7. Прва два облика извијања UU носача С профила, са процентима доприноса појединих модова



Слика 8. Прва два облика извијања UO носача С профила, са процентима доприноса појединих модова



Слика 9. Прва два облика извијања UU носача кутијастог профила, са процентима доприноса појединих модова



Слика 10. Прва два облика извијања УО носача кутијастог профила, са процентима доприноса појединих модова

Интересантно је примијетити да је критично оптерећење за кутијасте профил мање од оног за С, што се противи интуицији. С обзиром на то да су у питању локална избочавања, слиједи да је С профил нешто отпорнији на губитак локалне стабилности. Један од узрока оваквог понашања је свакако отвореност С пресека.

## 5. ЗАКЉУЧАК

Интеракција модова игра важну улогу при одређивању критичних вриједности оптерећења танкозидних носача. Класична теорија танкозидних носача може адекватно описати понашање само носача код којих су доминантни глобални модови, савијање и торзија, те тиме и интеракцију тих модова. Метод коначних трака се показује као погодан за испитивање оних видова губитка стабилности које не може да обухвати класична теорија, тј. интеракцију локалних, дисторзионих и глобалних модова. Оваква анализа је неопходна код прорачуна танкозидних носача мале глобалне виткости.

Сљедећи корак у анализи ће бити испитивање утицаја укрућења на интеракцију модова код танкозидних носача.

## 6. БИБЛИОГРАФИЈА

- [1] В. Захарович Власов, *Танкостенные упругие стрепжи*. Москва: Строииздат, 1940.
- [2] Д. Д. Милашиновић, *The Finite Strip Method in Computational Mechanics*. Beograd: Faculties of Civil Engineering, Subotica, Budapest, Belgrade, Birografika, 1997.
- [3] S. Adanya and B. W. Schafer, "A full modal decomposition of thin-walled, single-branched open cross-section members via the constrained finite strip method," *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 64, pp. 12–29, 2008.
- [4] I. E. Harik and G. L. Salamoun, "Analytical strip solution to rectangular plates," *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 112, No. 1, 1986.
- [5] А. Борковић, "Анализа еластичне стабилности танкозидних носача услед произвољног оптерећења," *IX међународни научно-стручни скуп: "Савремена теорија и пракса у градитељству"*, Мирко Аћић и Рајко Пуцар, ур., Бања Лука: Завод за изградњу, 2013.