



[1] 2013 1[1]

АГГ+ часопис за архитектуру, грађевинарство, геодезију и сродне научне области
ACEG+ Journal for Architecture, Civil Engineering, Geodesy and other related scientific fields

202-213

Прегледни научни рад | Review paper

UDK I UDC 624.073.8.046

DOI 10.7251/AGGPLUS1301202M

Рад примљен | Paper received 16/11/2013

Рад прихваћен | Paper accepted 06/12/2013

Наташа Мрђа

Архитектонско-грађевински факултет Универзитета у Бањалуци, Војводе Степе Степановића 77/3, Бањалука

Дијана Мајсторовић

Архитектонско-грађевински факултет Универзитета у Бањалуци, Војводе Степе Степановића 77/3, Бањалука

Милорад Дошеновић

Интеграл Инжењеринг а. д., Трг Републике Српске 8/ХII Бања Лука

Драган Милашиновић

Архитектонско-грађевински факултет Универзитета у Бањалуци, Војводе Степе Степановића 77/3, Бањалука

БИФУРКАЦИОНА
СТАБИЛНОСТ ТАНКИХ
ПЛОЧА СА
ИМПЛЕМЕНТАЦИЈОМ
РАЧУНАРСКОГ ПРОГРАМА

BIFURCATION PROBLEM OF THIN
PLATES WITH IMPLEMENTATION
OF COMPUTER PROGRAM

Прегледни научни рад

Review paper

Рад примљен | Paper accepted

06/12/2013

УДК | UDC

624.073.8.046

DOI

10.7251/AGGPLUS1301202M

Наташа Мрђа

Архитектонско-грађевински факултет Универзитета у Бањалуци, Војводе Степе Степановића 77/3, Бањалука

Дијана Мајсторовић

Архитектонско-грађевински факултет Универзитета у Бањалуци, Војводе Степе Степановића 77/3, Бањалука

Милорад Дошеновић

Интеграл Инжењеринг а. д., Трг Републике Српске 8/XII Бања Лука

Драган Милашиновић

Архитектонско-грађевински факултет Универзитета у Бањалуци, Војводе Степе Степановића 77/3, Бањалука

БИФУРКАЦИОНА СТАБИЛНОСТ ТАНКИХ ПЛОЧА СА ИМПЛЕМЕНТАЦИЈОМ РАЧУНАРСКОГ ПРОГРАМА

АПСТРАКТ

С обзиром на сложеност проблема напонско-деформацијског стања и стабилности конструктивних система, у раду је примијењена нелинеарна теорија. Приказано је извођење матрице крутости и геометријске матрице крутости, те дефинисан проблем бифуркационе стабилности. Рјешавање проблема бифуркационе стабилности представља одређивање својствених вриједности једначина који у ствари представљају одређивање критичних сила. Проблем бифуркационе стабилности је у овом раду разматран на танким плочама. На основу теоријског дијела, представљен је програм МКЕБС, настао у програмском пакету *Mathematica*, са циљем да се добију критичне силе плоча дискретизованих са низом елемената, што је кроз примјере приказано као коначан резултат рада.

Кључне ријечи: бифуркациона стабилност, *Wolfram Mathematica*, површинске конструкције, метод коначних елемената

BIFURCATION PROBLEM OF THIN PLATES WITH IMPLEMENTATION OF COMPUTER PROGRAM

ABSTRACT

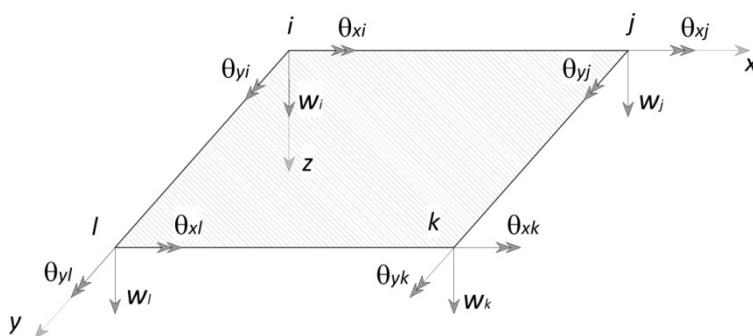
Considering the complexity of the problem of stress – strain state and stability of structural systems, nonlinear theory is applied in this paper. The subject of the paper is to perform the stiffness matrix and geometric stiffness matrix, and to define the problem of bifurcation stability. Solving the problem of bifurcation stability presents the determination of certain values, which present the determination of critical load. The problem of bifurcation stability is discussed on thin plates. Based on theoretical part, MKEBS program is made in *Mathematica* software, in order to obtain critical load of plates discretized with a number of elements. The results of MKEBS are shown through examples as the final result of the work.

Keywords: bifurcation problem, *Wolfram Mathematica*, plates, finite element method.

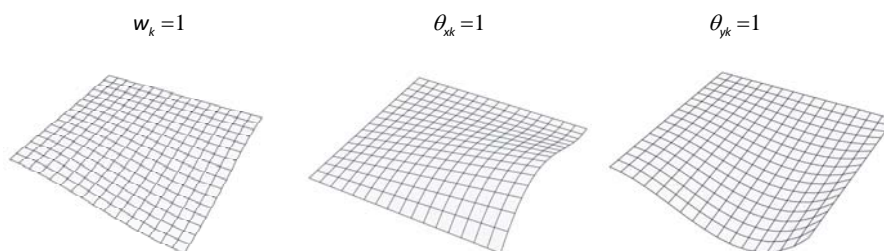
1. УВОД

Предмет рада ће бити ограничен на анализу танких плоча која се спроводи усвајањем Кирхоф-Лов (Kirchoff-Love) хипотезе. Мембранске силе у плочама и љускама могу извести извијање. Оне дјелују у средњој равни, а извијање се дешава када конструкција претвара мембранску енергију у енергију деформације савијања.

За дискретизацију је кориштен правоугани коначни елемент са 12 степени слободе приказан на слици 1. Овај елемент, иако неконформан са степеном континуитета C^0 , даје рјешења која конвергирају ка тачним [1]. Интерполационе функције, које физички представљају еластичне површи круто везаног правоугаоног елемента са све четири стране услед јединичног генералисаног помјерања, односно које представљају поље помјерања унутар коначног елемента у функцији од његових чворних помјерања, приказане су за чвор k на слици 2.



Слика 1. Правоугаони елемент плоче са 12 степени слободе



Слика 2. Интерполационе функције за чвор k

2. ПРОБЛЕМ БИФУРКАЦИОНЕ СТАБИЛНОСТИ СИСТЕМА КОНАЧНИХ ЕЛЕМЕНАТА

Бифуркациона стабилност је област линеарне анализе у којој се критично оптерећење добија рјешавањем проблема својствених вриједности. Најнижа својствена вриједност одређује ниво оптерећења до којег је систем стабилан, док одговарајући својствени вектор представља нову равнотежну форму система.

Проблем бифуркационе стабилности система коначних елемената дефинисан је изразом (1)

$$|\mathbf{K}_0 + \lambda \mathbf{K}_g| = 0 \quad (1)$$

При чему је λ фактор пропорционалности између напона и оптерећења, \mathbf{K}_0 основна матрица крутости, и \mathbf{K}_g геометријска матрица крутости елемената.

2.1. МАТРИЦА КРУТОСТИ ЕЛЕМЕНАТА \mathbf{K}_0

Вектор генералисаних помјерања \mathbf{u} у тачкама елемента изразићемо преко вектора параметара помјерања у чворовима елемента:

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}_q \mathbf{q} \quad (2)$$

При чему је \mathbf{A}_q матрица која успоставља везу између поменута два вектора а чији су елементи интерполационе функције, те се по њима и ова матрица назива матрица интерполационих функција.

Једначином (2) дефинисано је поље помјерања у елементу у зависности од помјерања у чворовима. Када је познато поље помјерања, може се одредити и поље деформација.

Компоненте деформација у зависности од компонената помјерања добијају се диференцирањем израза (2) односно примјеном одговарајуће матрице оператора над матрицом интерполационих функција. На тај начин, за вектор деформација, добија се:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}_q \mathbf{q} \quad (3)$$

При чему је \mathbf{B}_q матрица трансформације деформације.

Укупна потенцијална енергија Π тијела једнака је збиру енергије деформације и потенцијала сила, односно рада спољашњих сила:

$$\Pi = A + U \quad (4)$$

Односно

$$\Pi = \int_V \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dV - \int_V \mathbf{F}^T \mathbf{u} dV - \int_S \mathbf{p}^T \mathbf{u} dS \quad (5)$$

Смјеном (2) и (3) у (5) добија се

$$\Pi = \int_V \left[\frac{1}{2} (\mathbf{B}_q \mathbf{q})^T \mathbf{D} (\mathbf{B}_q \mathbf{q}) - \mathbf{F}^T (\mathbf{A}_q \mathbf{q}) \right] dV - \int_S \mathbf{p}^T (\mathbf{A}_q \mathbf{q}) dS \quad (6)$$

Након множења и сређивања чланова под знаком интеграла имамо

$$\Pi = \frac{1}{2}(\mathbf{q}^T \mathbf{K}_0 \mathbf{q}) - \mathbf{q}^T \mathbf{Q}_q \quad (7)$$

гдје је

$$\mathbf{K}_0 = \int_V \mathbf{B}_q^T \mathbf{D} \mathbf{B}_q dV \quad \text{и} \quad \mathbf{Q}_q = \int_V \mathbf{A}_q^T \mathbf{F} dV + \int_S \mathbf{A}_q^T \mathbf{p} dS \quad (8)$$

Даље изразе (8) можемо написати у облику

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_0 &= \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \\ \mathbf{Q} &= \mathbf{Q}_q = \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{F} dV + \int_S \mathbf{N}^T \mathbf{p} dS \end{aligned} \quad (9)$$

При чему \mathbf{K}_0 представља матрицу крутости елемента, а \mathbf{Q} вектор еквивалентног чворног оптерећења.

2.2. ГЕОМЕТРИЈСКА МАТРИЦА КРУТОСТИ ЕЛЕМЕНТА \mathbf{K}_g

Полазећи од општег израза за енергију деформације у геометријски нелинеарној анализи

$$A = \frac{1}{2} \int_V D_{ijkl} (e_{ij} e_{kl} + e_{ij} \eta_{kl} + e_{kl} \eta_{ij} + \eta_{ij} \eta_{kl}) dV \quad (10)$$

те уводећи одређена поједностављења, израз сводимо на

$$A = \frac{1}{2} \int_V (D_{ijkl} e_{ij} e_{kl} + \sigma_{ij} \eta_{ij}) dV \quad (11)$$

Односно у матричном облику

$$A = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T (\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_g) \mathbf{q} \quad (12)$$

При чему је

$$\mathbf{q}^T \mathbf{K}_0 \mathbf{q} = \int_V D_{ijkl} e_{ij} e_{kl} dV \quad (13)$$

Односно

$$\mathbf{q}^T \mathbf{K}_g \mathbf{q} = \int_V \sigma_{ij} \eta_{ij} dV \quad (14)$$

Ако сада примијенимо матрицу оператор

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (15)$$

на вектор генерализаних помјерања у тачкама елемената који ћемо означити са w , добијамо

$$\mathbf{L}w = \mathbf{L}\mathbf{N}^T \mathbf{q} = \mathbf{B}_{NL} \mathbf{q} \quad (16)$$

Односно

$$\mathbf{L}w = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{,x} \\ w_{,y} \end{bmatrix} \quad (17)$$

Из (16) и (17) добијамо да је

$$\begin{bmatrix} w_{,x} \\ w_{,y} \end{bmatrix} = \mathbf{B}_{NL} \mathbf{q} \quad (18)$$

А стога и да је

$$\begin{bmatrix} w_{,x} & w_{,y} \end{bmatrix} = \mathbf{q}^T \mathbf{B}_{NL}^T \quad (19)$$

Уносећи добијене матрице под интеграл и имајући у виду да је

$$\eta_{ij} = \frac{1}{2} u_{k,i} u_{k,j} \quad (20)$$

добијамо

$$\int_V \sigma_{ij} \eta_{ij} dV = \int_F \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} w_{,x} & w_{,y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{,x} \\ w_{,y} \end{bmatrix} dz dF = \mathbf{q}^T \left(\int_F \mathbf{B}_{NL}^T \mathbf{N}_{PN} \mathbf{B}_{NL} dF \right) \mathbf{q} \quad (21)$$

Из (14) и (21) слиједи да је

$$\mathbf{K}_g = \int_F \mathbf{B}_{NL}^T \mathbf{N}_{PN} \mathbf{B}_{NL} dF \quad (22)$$

гдје је \mathbf{B}_{NL} матрица трансформације нелинеарне деформације, а \mathbf{N}_{PN} матрица почетних напона, тачније матрица почетних сила.

Да бисмо одредили геометријску матрицу крутости потребно је да познајемо десну страну једначине (14). С обзиром на то да нам напони нису познати, у теорији

бифуркационе стабилности претпостављамо да је позната квалитативна расподела напона у плочи. Знајући квалитативну расподелу напона у плочи, можемо ријешити нелинеаран проблем користећи једначине линеарне теорије. Овај поступак се назива линеаризација једначина, а теорија која се бави њиховим проучавањем, линеаризована теорија.

3. ПРОГРАМ МКЕБС

Програм МКЕБС (Метод коначних елемената бифуркациона стабилност) настао је на основама програма МКТБС [2]. Програм МКТБС је првобитно написан у ФОРТРАН-у с циљем да се добију својствене вриједности правоугаоних плоча, док је тренутни облик добио у програмском пакету Mathematica. Mathematica пружа програмско окружење са великим бројем уграђених функција као што су интеграција, диференцирање, рјешење својственог проблема итд., као и могућност квалитетне графичке обраде резултата. Дијаграм тока програма МКЕБС приказан је на слици 3:



Слика 3. Дијаграм тока програма МКЕБС

4. НУМЕРИЧКИ ПРИМЈЕРИ

У наредним примјерима извршена је верификација програма МКЕБС. Извршено је поређење добијених резултата са резултатима добијеним аналитичким изразима и резултатима добијеним употребом софтверског пакета ABAQUS 6.7.

4.1. ПОРЕЂЕЊЕ СА АНАЛИТИЧКИМ РЈЕШЕЊИМА

Први степен верификације програма биће поређење резултата које добијамо програмом МКЕБС са резултатима добијеним аналитичким изразима према [3]

Критичну силу добијамо према изразу

$$(N_x)_{cr} = \frac{\pi^2 a^2 D}{m} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 = \frac{\pi^2 D}{b^2} k \quad (23)$$

гдје је

$$k = \left(\frac{mb}{a} + \frac{a}{mb} \right)^2 \quad (24)$$

коэффициент који зависи од граничних услова и од односа дужина страна плоче, m – број полуталаса у који се плоча дијели при извијању, a и b – ширина плоче у x и y правцу респективно.

Вриједности коэффициента k за различите граничне услове и различите односе страна дате су према [4].

Са D је означена крутост плоче на савијање:

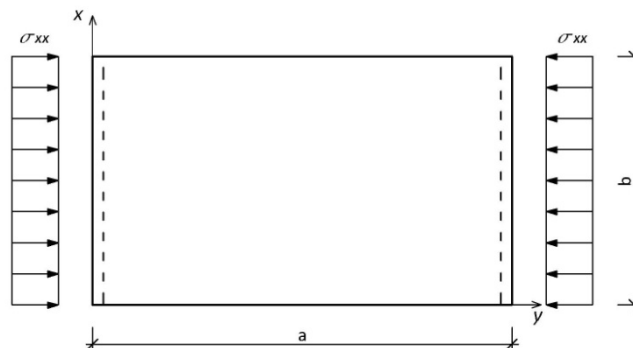
$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (25)$$

при чему је, за анализиране примјере, Поасонов (Poisson) коэффициент $\nu = 0$, Јангов (Young) модул еластичности $E = 30\text{GPa}$, и дебљина плоче $h = 12\text{cm}$.

Резултати из програма МКЕБС, у наредним примјерима, добијени су дискретизацијом са 10 елемената, тако што је плоча подијељена на по 10 елемената у једном и 10 у другом правцу.

4.1.1. Примјер 1

Посматрамо плочу слободно ослоњену на двије супротне стране, $y=0$ и $y=a$, а слободну на преостале двије (слика 4). Плоча је оптерећена у y правцу. Разлика у резултатима дата је у табелама 1 и 2.



Слика 4. Плоча слободно ослоњена на странама $y=0$ и $y=a$ и слободна на $x=0$ и $x=b$

Табела 1. Критичне силе, $N[kN]$, за $\frac{a}{b}=1$; $k=1$

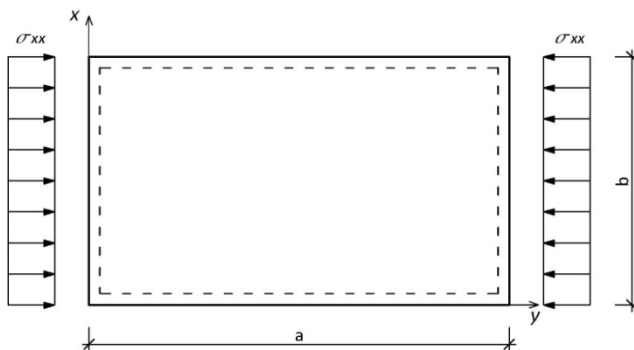
	b = 4m	b = 5m	b = 6m
[3] стр. 343	2664.79	1705.46	1184.35
МКЕБС	2664.65	1705.38	1184.29
Грешка (%)	0.00525	0.00469	0.00507

Табела 2. Критичне силе, $N[kN]$, за $\frac{a}{b}=2$; $k=0.25$

	b = 4m	b = 5m	b = 6m
[3] стр. 343	666.19	426.36	296.08
МКЕБС	666.20	426.37	296.09
Грешка (%)	0.00150	0.00235	0.00338

4.1.2. Примјер 2

Посматрамо плочу слободно ослоњену на све четири стране, оптерећену у у правцу (слика 5). Разлика у резултатима дата је у табелама 3, 4 и 5.



Слика 5. Плоча слободно ослоњена на све четири стране

Табела 3. Критичне силе, $N[kN]$, за $\frac{a}{b}=1$; $k=4$

	b = 4m	b = 5m	b = 6m
[3] стр. 343	10659.17	6821.871	4737.41
МКЕБС	10573.4	6766.97	4699.29
Грешка (%)	0.81119	0.81131	0.81119

Табела 4. Критичне силе, $N[kN]$, за $\frac{a}{b}=1.5$; $k=4.34$

	b = 4m	b = 5m	b = 6m
[3] стр. 343	11565.2	7401.73	5140.09
МКЕБС	11398.1	7294.77	5065.82
Грешка (%)	1.46603	1.46626	1.46610

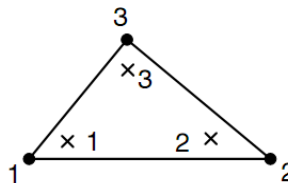
Табела 5. Критичне силе, $N[kN]$, за $\frac{a}{b}=2$; $k=4$

	b = 4m	b = 5m	b = 6m
[3] стр. 343	10659.17	6821.87	4737.41
МКЕБС	10449.6	6687.77	4644.29
Грешка (%)	2.00553	2.00515	2.00504

4.2. ПОРЕЂЕЊЕ СА АВАQUS-ОМ

АВАQUS 6.7 је комерцијални МКЕ софтверски пакет развијен од стране *Hibbitt, Karlsson & Sorensen Inc.* Састављен је од низа инжењерских програма, заснованих на методу коначних елемената. Њиме је могуће ријешити многе проблеме механике, од релативно једноставних линеарних па све до веома комплексних нелинеарних.

С обзиром на то да је испитивано понашање танке плоче, за примјере је кориштен троугаони елемент STRI3 (Слика 6). То је троугаони равни елемент танке плоче са три чвора од којих сваки има по 6 степени слободне.



Слика 6. STRI3 елемент танке равне плоче, са три тачке за интеграцију

Пуна интеграција се врши у три унутрашње тачке елемента STRI3. Овај елемент је једини у АВАQUS-овој библиотеци предвиђен за рјешавање танких плоча. Рјешење је могуће добити и коришћењем других елемената [5].

Као други степен верификације извршено је поређење резултата добијених у програму МКЕБС са резултатима добијеним употребом програмског пакета АВАQUS.

4.2.1. Примјер 3

Посматрамо плочу приказану на слици 4, слободно ослоњену на двије супротне стране, $y=0$ и $y=a$, а слободну на преостале двије. Разлика у резултатима дата је у табелама 6, 7 и 8.

Табела 6. Критичне силе, $N[kN]$, за $\frac{a}{b}=1$

	b = 4m	b = 5m	b = 6m
АВАQUS	2704,40	1731,00	1202,60
МКЕБС	2664.65	1705.38	1184.29
Грешка (%)	1.49175	1.50230	1.54607

Табела 7. Критичне силе, $N[kN]$, за $\frac{a}{b}=1.5$

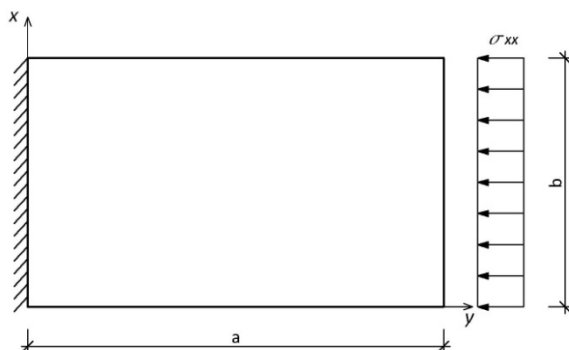
	b = 4m	b = 5m	b = 6m
АВАQUS	1202,30	763,07	529,99
МКЕБС	1184.35	757.98	526.37
Грешка (%)	1.51560	0.67152	0.68773

Табела 8. Критичне силе, $N[kN]$, за $\frac{a}{b}=2$

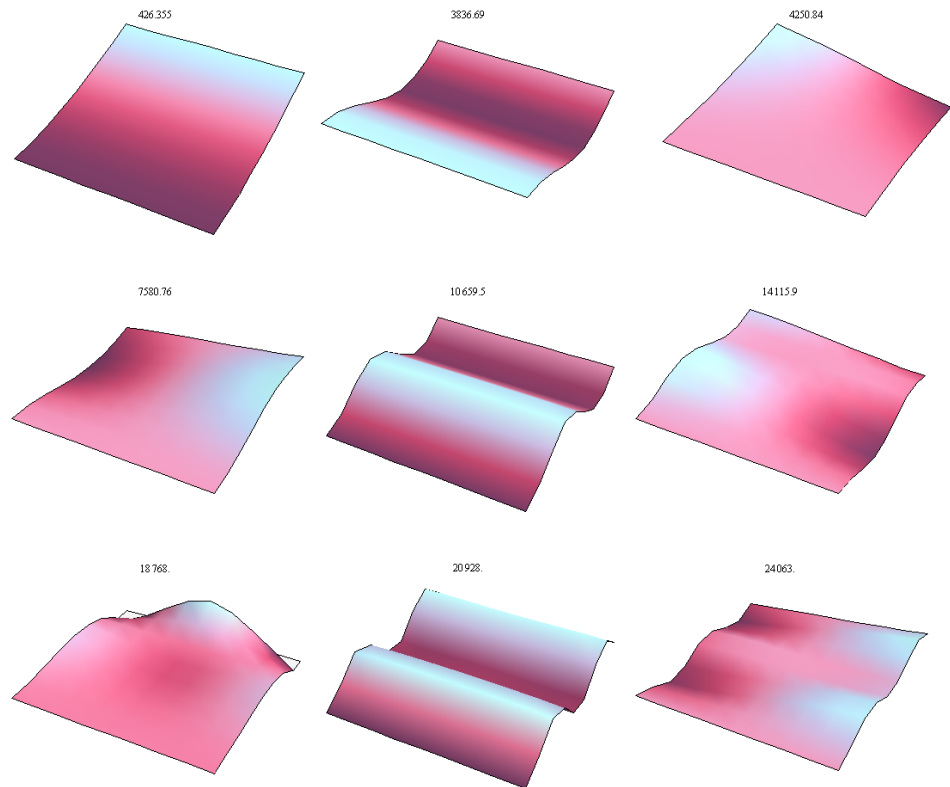
	b = 4m	b = 5m	b = 6m
АВАQUS	668,61	427,98	297,23
МКЕБС	666.20	426.37	296.09
Грешка (%)	0.36175	0.37761	0.38502

4.2.2. Примјер 4

Посматрајмо плочу која је на једној страни укљештена а на преостале три слободна (конзолна плоча), која је у овом случају дискретизована са 8 елемената у x и 8 елемената у y правцу (Слика 7):

Слика 7. Плоча укљештена на страни $y=0$ слободна на преостале три стране

Како за дати, тако и за сваки од претходно изложених примјера, можемо приказати и облике извијања који одговарају добијеним критичним силама. Такође, могло би се извршити и поређење облика извијања добијених у програму МКЕБС са облицима извијања које добијамо у АВАQUS – у. Међутим, овдје ћемо приказати својствене облике датог примјера, конзоле димензија 5 x 5 m, дискретизоване са 8 x 8 елемената, као најинтересантније:



Slika 8. Првих 9 облика извијања конзолне плоче

4.3. ДИСКУСИЈА РЕЗУЛТАТА

У примјерима 1 и 2 видимо да су резултати добијени програмом МКЕБС скоро једнаки резултатима добијеним аналитичким изразима, а у примјеру 3 да су скоро једнаки и резултатима добијеним програмским пакетом АВАQUS 6.7. У примјеру 4 дати су облици извијања којима се показује могућност програма.

5. ЗАКЉУЧАК

Програм МКЕБС је један од низа програма израђених на Архитектонско-Грађевинском факултету у Бањалуци у циљу стварња сопственог софтвера. Паралелна израда малих софтвера је корак ка изради већег, свеобухватнијег софтвера, којим би се могла избјећи куповина скувих иностраних софтвера.

Програм МКЕБС тренутно даје критичне силе и својствене облике плоча.

6. БИБЛИОГРАФИЈА

- [1] М. Sekulović, *Metod konačnih elemenata*. Beograd: Građevinska knjiga, 1988.
- [2] D. D. Milašinović, *The Finite Strip Method in Computational Mechanics*. Subotica, Budapest, Belgrade: Faculties of Civil Engineering: University of Novi Sad, Technical University of Budapest and University of Belgrade, 1997.
- [3] S. Timoshenko and J. Gere, *Theory of elastic stability*. McGraw-Hill international book company, 1963.
- [4] A. A. Umanski. *Konstrukterski priručnik*. Beograd: Građevinska knjiga, 1980.
- [5] Abaqus. Theory manual. Version 6.11. Dassault systems, 2007.