Архитектонско-грађевински факултет I **Универзитет у Бањој Луци**
Faculty of architecture and civil engineering I **University of Banja Luka**
ISSN 2303-6036 **UDK** I UDC 72

АГ
Г+

[1] 2013 1[1]

АГГ+ часопис за архитектуру, грађевинарство, геодезију и сродне научне области
ACEG+ Journal for Architecture, Civil Engineering, Geodesy and other related scientific fields

226-237 **Прегледни научни рад** I Review paper
UDK I UDC 624.072.336.042
DOI 10.7251/AGGPLUS1301226B
Рад примљен I Paper received 17/11/2013
Рад прихваћен I Paper accepted 24/12/2013

Александар Борковић
Архитектонско-грађевински факултет Универзитета у Бањалуци, Војводе Степе Степановића 77/3, Бањалука, aborkovic@agfbl.org

Драган Милашиновић
Архитектонско-грађевински факултет Универзитета у Бањалуци, Војводе Степе Степановића 77/3, Бањалука

Слободан Славнић
Архитектонско-грађевински факултет Универзитета у Бањалуци, Војводе Степе Степановића 77/3, Бањалука

МАТЕРИЈАЛНО НЕЛИНЕАРНА АНАЛИЗА РЕШЕТКАСТИХ НОСАЧА У РАВНИ

MATERIAL NONLINEAR ANALYSIS OF PLANE TRUSS STRUCTURES

Прегледни научни рад
Review paper
Рад примљен I Paper accepted
24/12/2013
UDK I UDC
624.072.336.042
DOI
10.7251/AGGPLUS1301226B

Александар Борковић
Архитектонско-грађевински факултет Универзитета у Бањалуци, Војводе Степе Степановића 77/3, Бањалука, aborkovic@agfbl.org

Драган Милашиновић
Архитектонско-грађевински факултет Универзитета у Бањалуци, Војводе Степе Степановића 77/3, Бањалука

Слободан Славнић
Архитектонско-грађевински факултет Универзитета у Бањалуци, Војводе Степе Степановића 77/3, Бањалука

МАТЕРИЈАЛНО НЕЛИНЕАРНА АНАЛИЗА РЕШЕТКАСТИХ НОСАЧА У РАВНИ

АПСТРАКТ

У раду се даје један приступ еласто-пластичној анализи грађевинских конструкција. Кориштен је једноставан коначни елемент раванске решетке са два чвора. Овај елемент је идеалан за изучавање основа теорије пластичности јер је стање и напона и деформација једнодимензионално. Примијењен је материјални модел линеарног изотропног ојачања. Алгоритам добро познат у литератури је програмиран у програмском пакету *Wolfram Mathematica*. Добијени резултати се у потпуности поклапају са онима добијеним комерцијалним софтверским пакетима. Програмски код је отвореног типа и доступан је свима у образовне сврхе.

Кључне ријечи: *материјално нелинеарна анализа, равански решеткасти носач.*

MATERIAL NONLINEAR ANALYSIS OF PLANE TRUSS STRUCTURES

ABSTRACT

An approach to elasto-plastic analysis of engineering structures is presented in this study. Simple plane truss finite element with two nodes is used. This element is ideally suited as a basis for studying plasticity theory since it implies one-dimensional state of stress and strain. Material model of linear isotropic hardening is applied. Algorithm well-known in literature is implemented in software package Wolfram Mathematica. Obtained results fully correspond with those obtained from commercial software packages. Developed code is open-sourced and it is freely available for educational purposes.

Keywords: *material nonlinear analysis, plane truss structure.*

1. УВОД

Многе грађевинске конструкције се пројектују тако да у случају дејства екстремних утицаја не доживе колапс, него да одређени дијелови пластифицирају, чиме се обично губи функционалност али се спречавају катастрофалне посљедице. Ова ''резерва'' коју посједује материјал се описује материјално нелинеарним законима, према којима, након изласка из стања еластичности, материјал може акумулирати још значајан дио енергије. Овакво понашање конструкције спада у домен материјално нелинеарне анализе.

Прорачун конструкција се данас стандардно проводи нумеричким методама, од којих је тренутно најкориштенија метода коначних елмената (МКЕ). Савремени софтверски МКЕ пакети омогућавају прорачун конструкција изузетне сложености, како са геометријског тако и са материјалног становишта. Неки од најпознатијих су: SAP2000, Abaqus, ADINA итд. Проблем који се може јавити при кориштењу ових софтвера јесте што се често занемарује оно што стоји између унесених података и добијених резултата, те није ријеткост да се они погрешно тумаче. Правилан приступ њиховом кориштењу подразумијева детаљно изучавање основа теорије која стоји иза примијењеног алгоритма прорачуна, прије упуштања у моделирање проблема и тумачење резултата.

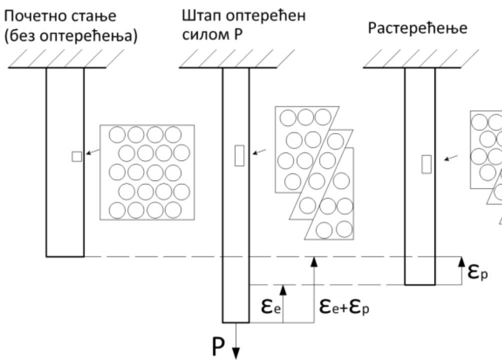
Детаљан преглед нелинерне механике чврстог тијела је дат у [1]. Међутим, представљени приступ је веома генералан, те може бити обесхрабрујући за студенте нижих година или за инжењере који се баве праксом. Наиме, они једноставно тешко могу издвојити довољно времена да изучавају општу теорију, него им је потребан само увид у основе. Тако је један згодан приступ изучавању основа теорије пластичности примјеном рачунарских алгебарских система дат у [2]. Показане су предности писања програмских кодова у савременим програмским језицима у односу на програме писане у класичном језику FORTRAN. Сажето обрађени разни закони изотропног ојачања у једнодимензионалном случају и одговарајући алгоритми се могу наћи у [3]. Извођење једначина и програмирање у овом истраживању углавном прате приступе дате у [1, 2, 3].

У раду је представљена само материјално нелинеарна анализа, и то један њен специјални случај – линеарно изотропно ојачање. Ефекти геометријске нелинеарности су занемарени, а примјер је одабран тако да ни стабилност штапова није доведена у питање. Циљ је да се на једноставном случају прикаже алгоритам еласто-пластичног прорачуна, те његова примјена у рачунарском програму. Ово би требало омогућити студентима и инжењерима добру полазну основу за квалитетно кориштење комерцијалних софтверских пакета за прорачун грађевинских коснтрукција.

Прво је дат кратак осврт на материјално нелинарно понашање метала. Потом је детаљно представљен развој алгоритма за еласто-пластичну анализу са линеарно изотропним ојачањем у случају аксијалног напрезања. На крају је, примјеном представљеног поступка, детаљно анализиран један решеткасти рам на три зглоба.

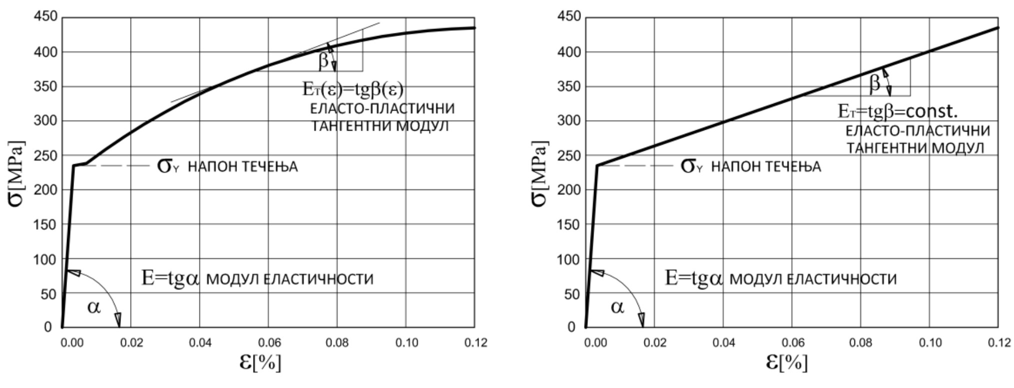
2. МАТЕРИЈАЛНО НЕЛИНЕАРНО ПОНАШАЊЕ МЕТАЛА

Чисти метали и њихове легуре имају кристалну структуру чије се везе усљед оптерећења испод границе течења након растерећења враћају у првобитни положај. У случају напрезања преко границе течења настају линијске дислокације тј. везе у кристалној структури се развлаче са смицањем у равни, слика 1. Дефекти ове врсте настају не само усљед дјеловања спољашњих сила већ могу настати и као резултат постојања унутрашњих напона у материјалу (при загријавању или хлађењу) [4].



***Слика 1**. Понашање структуре метала када напон пређе границу течења*

За већину материјала однос напон–деформација је линеаран до појаве напона течења. Деформација до те границе је еластична. За напоне преко те границе настаје пластична (трајна) деформација. Типичан радни дијаграм напон–деформација за Č 0361, добијен лабораторијским испитивањем, приказан је на слици 2 лијево, док је идеализовани билинеарни дијаграм дат на слици 2 десно. У овом раду је рађено само са линеарним ојачањем. Међутим, као што се види на резултатима експеримента, за описивање везе напон–деформација ван границе еластичности могу се примијенити и друге функције вишег реда.



***Слика 2**. Сигма-епсилон зависност за Č 0361: експериментална крива (лијево) и идеализован дијаграм (десно)*

Изотропно ојачање је модел пластичности који подразумијева да се материјалу, након пластичног деформисања, мијења напон течења [1, 5]. Наиме, ако се тај материјал растерети и опет оптерети, граница течења ће бити већа од оне из првог цилуса оптерећења. Сада ће се материјал понашати еластично до достизања напона течења који је већи од оног из првог циклуса. Узима се да ово важи и за напоне притиска и затезања, те ће материјал који се пластично деформисао при затезању, при притиску такође ојачати, тј. имати већи напон течења. Изотропно ојачање не узима у обзир *Bauschinger* ефекат и предвиђа да ће, током неколико циклуса оптерећење–

растерећење, материјал ојачавати све док не почне одговарати еластично. Овакав модел очигледно не одговара цикличким случајевима оптерећења, те је уведен модел кинематичког ојачања [1, 5]. Оно узима у обзир омекшавање материјала при притиску, те се стога може користити при цикличком оптерећењу и појави *Bauschinger* ефекта. Стварни метали, у одређеној мјери, доживљавају и изотропно и кинематичко ојачање. За случајеве монотоно растућег оптерећења, оба модела дају исти резултат.

3. ЈЕДНОДИМЕНЗИОНАЛНА ПЛАСТИЧНОСТ СА ЛИНЕАРНИМ ИЗОТРОПНИМ ОЈАЧАЊЕМ

3.1. ОСНОВНИ ПОЈМОВИ

Код ојачавајућих материјала, еластична деформација се повећава током течења заједно са пластичном. Стога се еластична деформација дефинише као она која се поврати након растерећења, док је пластична она која остаје у материјалу и након растерећења. Слиједи да се укупна деформација може адитивно декомпоновати на еластичну и пластичну

$$\varepsilon = \varepsilon^{p} + \varepsilon^{e} \,. \tag{1}$$

Кад год се дешава пластична деформација, дешава се и пластично течење. Током ојачавања материјала, вриједност границе течења се мијења. Због тога се у моделирању пластичности користе *унутрашње промјенљиве ојачања* као згодан начин праћења акумулираног ојачања. У случају изотропног ојачања, долази до његовог нагомилавања, те се дефинише унутрашња промјенљива, α, којом се прати укупна промјена пластичне деформације. Ова унутрашња промјенљива се назива *еквивалентна пластична деформација*.

Условом (функцијом) течења *f* се математички дефинише када долази до течења. Најпознатији услови течења су вон Мизесов и Трескин. Код линеарног изотропног ојачања *f* се усваја као тренутни ниво напона, σ, минус линеарна функција ојачања

$$f(\sigma) = |\sigma| - (\sigma_Y + H\alpha) \,, \tag{2}$$

гдје је σ_Y напон течења а *H* модул ојачања. Како се одвија пластично деформисање, тако се и α ажурира и мијења, те се одређује тренутна функција течења. Ако је њен предзнак негативан, тренутни ниво напона је мањи од границе течења и постоји само прираштај еластичне деформације. Ако је предзнак позитиван, тренутни ниво напона је изнад границе течења, те се повећавају и еластичне и пластичне деформације. Ипак, позитивна вриједност функције течења није дозвољена у стварности. Задатак је одредити количину пластичног течења и развој ојачања тако да функција течења буде нула. Ово се остварује рјешавањем једначина по *параметру конзистенције* γ, који служи за одређивање нивоа пластичног течења и ојачања тако да услов *f=0* буде задовољен. Назив параметра долази из услова да су све релевантне варијабле конзистентне са условом да је *f=0* када се дешава пластично течење.

Функција *sgn* се често користи у дефинисању алгоритама за описивање пластичности. Ова функција узима као аргумент било коју реалну промјенљиву и враћа -1 ако је аргумент негативан и +1 ако је позитиван. Она је неопходна јер се, у општем случају, дешавају и позитивни и негативни прираштаји напона.

Процес описивања еласто-пластичног оптерећавања и растерећавања захтијева пажљив математички опис. У ту сврху се користе *Kuhn-Tucker* услови [1, 3]

$$\gamma \geq 0, \quad f(\sigma) \leq 0, \quad \gamma f(\sigma) = 0 \tag{3}$$

којима се формирају математички алгоритми за моделирање пластичног течења. Такође се користи и услов конзистенције [1, 3] који дефинише да за *f=0* мора важити

$$\gamma \dot{f}(\sigma) = 0 \,. \tag{4}$$

Приликом извођења алгоритма за моделирање пластичности, често се користе изводи по времену који уносе нејасноћу јер је понашање које моделирамо независно од брзине деформисања. Наиме, под инкрементом времена се, у нелинеарној статичкој анализи, стандардно подразумијева инкремент оптерећења. Тако се, рецимо, тренутни напон израчунава додавањем прираштаја на постојећу вриједност, $\sigma_{n+1} = \sigma_n + \Delta\sigma$. Овдје је $\Delta\sigma$ прираштај напона аналоган са $\dot{\sigma} = (\partial\sigma / \partial t) d\dot{\varepsilon}$.

Закон течења описује како се пластична деформација развија током времена, тј. током процеса оптерећавања. Понашање великог броја материјала се може описати законом течења у облику:

$$\dot{\varepsilon}^p = \gamma \frac{\partial g}{\partial \sigma} \tag{5}$$

гдје је *g* скаларна функција која диференцирана по напонима даје пластичне деформације те се стога назива пластични потенцијал. Ако пластични потенцијал није једнак закону течења, у питању је неасоцијативни закон течења. Међутим, овдје разматрамо асоцијативну пластичност, тј. случај када пластични потенцијал јесте једнак закону течења *g=f*

$$\dot{\varepsilon}^p = \gamma \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \gamma \,\mathrm{sgn}\,\sigma \,. \tag{6}$$

Оваква пластичност се назива асоцијативна јер је закон течења повезан са одређеним критеријумом течења [1].

3.2. ЕЛАСТО-ПЛАСТИЧНИ ТАНГЕНТНИ МОДУЛ

Еласто-пластични тангентни модул, E_T, даје везу између брзина, тј. прираштаја деформације и напона. Његово извођење је кључни корак у еласто-пластичној анализи.

За *f<0*, материјал је у границама еластичности, и напон је резултат само еластичне деформације:

$$\sigma = E\varepsilon^e = \mathrm{E}\left(\varepsilon - \varepsilon^p\right) \qquad \dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon}^e = \mathrm{E}\left(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p\right) \,. \tag{7}$$

Ако важе стандардни *Kuhn-Tucker* услови (3) и услов конзистенције (4), за $\gamma \geq 0$ слиједи $\dot{f} = 0$, те посредним диференцирањем добијамо

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial t} = 0 . \tag{8}$$

Уврштавањем појединих парцијалних извода у једначину (8), брзину функције течења изражавамо као

$$\dot{f} = \mathrm{sgn}(\sigma)\dot{\sigma} - H\dot{\alpha} = 0 . \tag{9}$$

С обзиром на (6) и (7), као и да је $\dot{\alpha} = \gamma$, слиједи

$$\dot{f} = sgn(\sigma)E\left[\dot{\varepsilon} - \gamma sgn(\sigma)\right] - H\gamma = 0 . \tag{10}$$

С обзиром на то да је $\left(sgn(\sigma)\right)^2 = 1$, из (10) се може одредити γ

$$\gamma = \frac{sgn(\sigma)E\dot{\varepsilon}}{E+H} . \tag{11}$$

Пошто је $\dot{\sigma} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}\dot{\varepsilon}$, кориштењем (6), (7) и (11), добијамо брзину напона:

$$\dot{\sigma} = E\left(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p\right) = E\left[\dot{\varepsilon} - \gamma sign(\sigma)\right] = E\left\{\dot{\varepsilon} - \frac{\left[sign(\sigma)\right]^2 E\dot{\varepsilon}}{E+H}\right\} = \left(E - \frac{E^2}{E+H}\right)\dot{\varepsilon} = \frac{EH}{E+H}\dot{\varepsilon} \tag{12}$$

из чега се види да је еласто-пластични тангентни модул

$$E_T = \frac{EH}{E+H} . \tag{13}$$

3.3. АЛГОРИТАМ ЗА ЈЕДНОДИМЕНЗИОНАЛНУ ПЛАСТИЧНОСТ СА ЛИНЕАРНИМ ИЗОТРОПНИМ ОЈАЧАЊЕМ

Претпостављамо да је одређен инкремент деформације тако да се може одредити и нова укупна деформација. На основу ње се рачуна пробна вриједност услова течења, f_{n+1}^{probno}. Ако је $f_{n+1}^{probno} \leq 0$, деформација је еластична и рјешење је тривијално, али ако је $f_{n+1}^{probno} > 0$, онда је у питању пластични инкремент. За њега је потребно срачунати σ_{n+1} и α_{n+1} такве да је $f\left(\sigma_{n+1}, \alpha_{n+1}\right) = 0$ и $\Delta\gamma > 0$. Познавање ових величина омогућава одређивање ε_{n+1}^p, тј. нове укупне пластичне деформације. Алгоритам за типичан пластични корак изражава σ_{n+1} у функцији од σ_{n+1}^{probno} і $\Delta\gamma$:

$$\begin{aligned}\sigma_{n+1} &= E\left(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^p\right) = E\left(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p\right) - E\left(\varepsilon_{n+1}^p - \varepsilon_n^p\right)\\ &= E\left(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p\right) - E\dot{\varepsilon}_{n+1}^p = \sigma_{n+1}^{probno} - E\Delta\gamma sgn\left(\sigma_{n+1}\right)\end{aligned} \tag{14}$$

Претпостављајући да се тачна вриједност $\Delta\gamma > 0$ може наћи за тренутни пластични корак, остале величине се рачунају као

$$\begin{aligned}
&\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{probno} - E\Delta\gamma\, sgn\left(\sigma_{n+1}\right) \\
&\varepsilon_{n+1}^{p} = \varepsilon_{n}^{p} + E\Delta\gamma\, sgn\left(\sigma_{n+1}\right) \\
&\alpha_{n+1} = \alpha_{n} + \Delta\gamma \\
&f_{n+1} \equiv \left|\sigma_{n+1}\right| - \left(\sigma_{Y} + H\alpha_{n+1}\right) = 0.
\end{aligned} \tag{15}$$

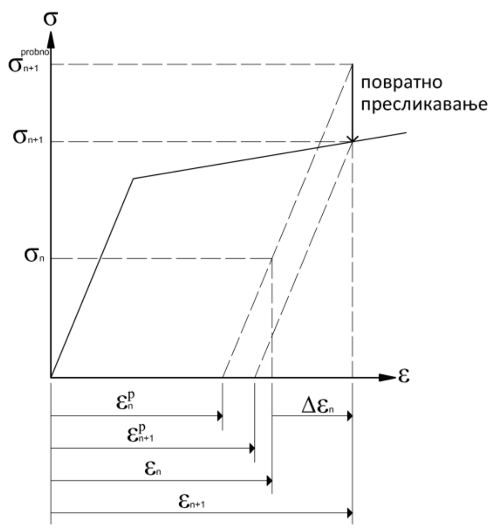
Једначине (15) се рјешавају у функцији почетног еластичног стања, примјеном алгоритма *повратног пресликавања* (*return mapping*), слика 3. Овај алгоритам припада групи *еластични предиктор – пластични коректор* алгоритама. Наиме, пробни еластични напон (*predictor*) се коригује пластичним итерацијама (*corrector*).

Тако је напон у *n+1* инкременту

$$\left|\sigma_{n+1}\right| sgn\left(\sigma_{n+1}\right) = \left|\sigma_{n+1}^{probno}\right| sgn\left(\sigma_{n+1}^{probno}\right) - E\Delta\gamma\, sgn\left(\sigma_{n+1}\right), \tag{16}$$

што можемо записати као

$$\left(\left|\sigma_{n+1}\right| + \Delta\gamma E\right) sgn\left(\sigma_{n+1}\right) = \left|\sigma_{n+1}^{probno}\right| sgn\left(\sigma_{n+1}^{probno}\right). \tag{17}$$



Слика 3. *Алгоритам повратног пресликавања*

С обзиром на то да су $\Delta\gamma$ и *E* већи од нула, да би горњи изрази важили, морају бити задовољени услови:

$$\begin{aligned}
&sgn\left(\sigma_{n+1}\right) = sgn\left(\sigma_{n+1}^{probno}\right) \\
&\left|\sigma_{n+1}\right| + \Delta\gamma E = \left|\sigma_{n+1}^{probno}\right|.
\end{aligned} \tag{18}$$

Још треба наћи параметар конзистенције $\Delta\gamma > 0$ из дискретног услова конзистенције (15)^4. Примјеном (18)^2 и (15)^4 добијамо

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= \left|\sigma_{n+1}^{probno}\right| - \Delta\gamma E - \left(\sigma_Y + H\alpha_{n+1}\right) \\ &= \left|\sigma_{n+1}^{probno}\right| - \Delta\gamma E - \left(\sigma_Y + H\alpha_{n+1}\right) - \left(\sigma_Y + H\alpha_n\right) + \left(\sigma_Y + H\alpha_n\right) \\ &= \left|\sigma_{n+1}^{probno}\right| - \left(\sigma_Y + H\alpha_n\right) - \Delta\gamma E - \left(\sigma_Y + H\alpha_{n+1}\right) + \left(\sigma_Y + H\alpha_n\right) \\ &= f_{n+1}^{probno} - \Delta\gamma E - \left(\sigma_Y + H\alpha_{n+1}\right) + \left(\sigma_Y + H\alpha_n\right). \end{aligned} \tag{19}$$

Сада се може одредити параметар конзистенције

$$\begin{aligned} & f_{n+1}^{probno} - \Delta\gamma E - \left(\sigma_y + H\alpha_{n+1}\right) + \left(\sigma_y + H\alpha_n\right) \\ &= f_{n+1}^{probno} - \Delta\gamma E - H\left(\alpha_{n+1} - \alpha_n\right) \\ &= f_{n+1}^{probno} - \Delta\gamma E - K\Delta\gamma = 0 \end{aligned} \tag{20}$$

као

$$\Delta\gamma = \frac{f_{n+1}^{probno}}{E + H}. \tag{21}$$

Примјеном (18)[1] и (15)[123] добијамо

$$\begin{aligned} \sigma_{n+1} &= \sigma_{n+1}^{probno} - \Delta\gamma E sgn\left(\sigma_{n+1}^{probno}\right) \\ \varepsilon_{n+1}^{p} &= \varepsilon_n^p + \Delta\gamma sgn\left(\sigma_{n+1}^{probno}\right) \\ \alpha_{n+1} &= \alpha_n + \Delta\gamma. \end{aligned} \tag{22}$$

Примијетимо да (22)[1] може бити записан као

$$\sigma_{n+1} = \left[1 - \frac{\Delta\gamma E}{\left|\sigma_{n+1}^{probno}\right|}\right]\sigma_{n+1}^{probno}. \tag{23}$$

Треба напоменути да је алгоритамски тангентни модул у случају једнодимензионалне пластичности једнак еласто-пластичном тангентном модулу, што није случај код вишедимензионалних стања [3].

3.4. АЛГОРИТАМ ЗА ЛИНЕАРНО ИЗОТРОПНО ОЈАЧАЊЕ

Алгоритам је већим дијелом урађен према [3]:

1. почињемо са познатим величинама из претходног инкремента $\left[\varepsilon_n, \varepsilon_n^p, \alpha_n\right]$

2. одређујемо инкремент деформације и добијамо укупну деформацију $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \Delta\varepsilon_n$

3. одређујемо пробни еластични напон и пробну вриједност услова течења

$$\sigma_{n+1}^{probno} = E\left(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p\right)$$
$$\varepsilon_{n+1}^{p\ probno} = \varepsilon_n^p$$
$$\alpha_{n+1}^{probno} = \alpha_n$$
$$f_{n+1}^{probno} = \left|\sigma_{n+1}^{probno}\right| - \left(\sigma_y + H\alpha_n\right)$$

Сада вршимо тест, да ли је или не материјал пластифицирао:

- ако је $f_{n+1}^{probno} \le 0$, слиједи да је у питању еластични инкремент

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{probno}$$
$$E_T = E$$

излаз из алгоритма

- ако је $f_{n+1}^{probno} > 0$, тренутни инкремент је еласто-пластичан, прелазимо на корак 4

4. еласто-пластични корак

$$\Delta\gamma = \frac{f_{n+1}^{probno}}{E+H}$$
$$\sigma_{n+1} = \left[1 - \frac{\Delta\gamma E}{\left|\sigma_{n+1}^{probno}\right|}\right]\sigma_{n+1}^{probno}$$
$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \Delta\gamma\, sgn\left(\sigma_{n+1}^{probno}\right)$$
$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \Delta\gamma$$
$$E_T = \frac{EH}{E+H}$$

крај алгоритма.

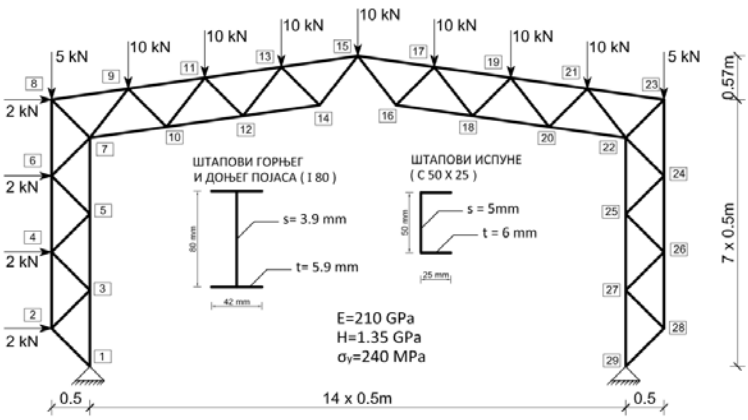
4. НУМЕРИЧКИ ПРИМЈЕР

Представљени приступ је програмиран у пакету *Wolfram Mathematica*. Кориштен је класични коначни елемент простог раванског штапа [6]. Програм за прорачун раванских решеткастих носача [7] је унапређен увођењем представљеног алгоритма. С обзиром на то да је усвојени материјални модел билинеаран, рјешавање се може извести и без примјене Њутн-Рапсоновог итеративног метода. Међутим, у циљу остављања могућности каснијег унапређења, тј. увођења комплекснијих материјалних модела, ипак је уграђен овај поступак.

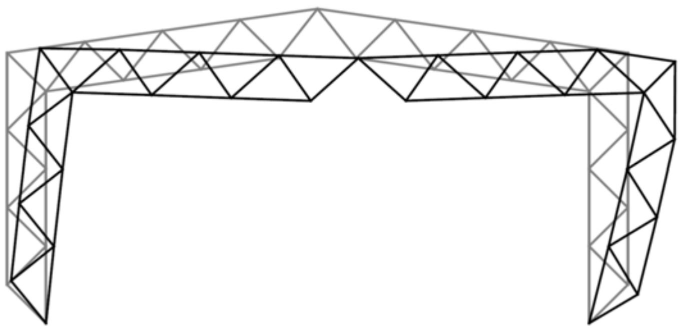
Резултат је програмски код *MKE resetka plasticnost 1.0.* У питању је софтвер отвореног кода и доступан је свима на веб страници предмета МКЕ [8]. Програм је детаљно коментарисан са описним именима промјенљивих, те би требао бити читљив свима са основним познавањем МКЕ и теорије пластичности.

У циљу верификације представљеног приступа, извршена је нумеричка анализа једног решеткастог носача. Геометријске и материјалне карактеристике су дате на слици 4, заједно са шемом оптерећења. Оптерећење је нанијето као монотоно растуће у 20 инкремената. Деформисан носач је приказан на слици 5, док су добијени напони у свим штаповима представљени на слици 6. Три хоризонтална помјерања чворова су упоређена на слици 7, док је на слици 8 дата зависност напона и деформације у штапу 22–23.

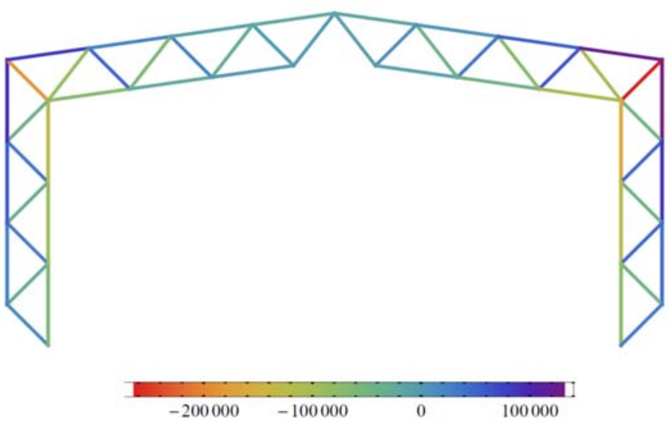
Добијени резултати су упоређени са онима добијеним комерцијалним МКЕ програмом Abaqus [9]. С обзиром на то да се резултати разликују свега око 0.05 %, поређење је изостављено.



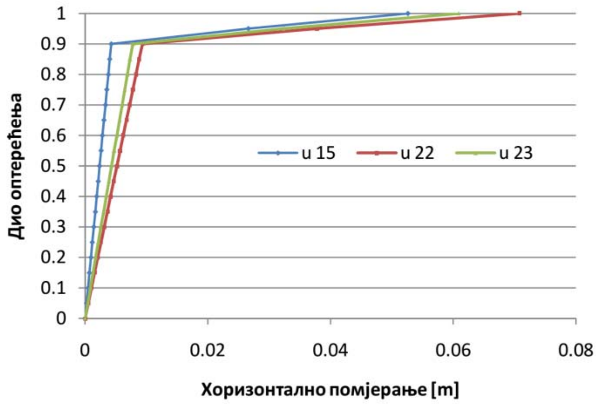
Слика 4. *Статичка шема конструкције са оптерећењем*



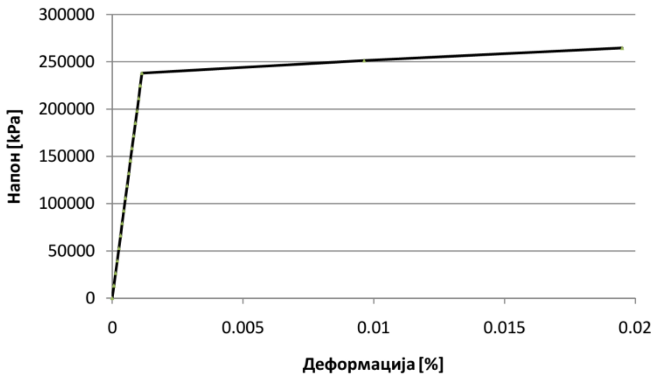
Слика 5. *Комбиновани недеформисани и деформисан носач, размјера 10:1*



Слика 6. *Напони у штаповима [kPa]*



Слика 7. *Зависност карактеристичних помјерања од нивоа оптерећења*



Слика 8. *Зависност напона и деформације у штапу 22–23*

5. ЗАКЉУЧАК

При пројектовању грађевинских конструкција често је потребно примијенити материјално нелинеарне моделе. Представљени једноставни модел еласто-пластичног понашања може послужити као полазна основа за учење студентима виших година студија као и инжењерима грађевинарства којима су потребна знања из тродимензионалне анализе деформабилног континуума.

Добијени резултати се потпуно поклапају са онима из комерцијалних МКЕ софтвера, што је свакако посљедица усвојеног једноставног модела.

Израђени код је отвореног типа, што омогућава свакоме да га проучава, модификује и унапређује у складу са потребама. Сљедећи корак ће бити додавање и ефеката геометријске нелинеарности, чиме ће бити заокружен једноставан код за нелинеарни прорачун решеткастих конструкција.

6. БИБЛИОГРАФИЈА

[1] A. Ibrahimbegovic, Nonlinear Solid Mechanics: Theoretical Formulations and Finite Element solution methods. Springer, 2010.

[2] Y. Jiang, C. Wang, ”On Teaching Finite Element Method in Plasticity With Mathematica,” *Computer Applications in Engineering Education*, 16(3), pp. 233–242, 2008.

[3] Yaw L. Louie, Nonlinear Static-1D Plasticity – Various Forms of Isotropic Hardening. Walla Walla University, 2012.

[4] М. Мурављов, *Грађевински материјали.* Београд: Грађевинска књига, 2005.

[5] М. Којић, *Примењена теорија пластичности*. Крагујевац: Машински факултет, 1979.

[6] Г. Раденковић, *Статика линијских носача.* Београд: Грађевинска књига, 2011.

[7] А. Борковић, ”О унапређењу наставе из области нумеричке анализе конструкција развојем софтвера отвореног кода,” у Зборник радова са симпозијума: Технологија, информатика и образовање – стање и проблеми, циљеви и могућности, промјене и перспективе, Бањалука, 2013.

[8] www.agfbl.org/predmeti/mke

[9] Abaqus, Theory manual, version 6.7. Dassault systems, 2007.